

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2024
(Three-Year Scheme of 10+2+3)
(Common for the Faculties of Arts and Science)
MATHEMATICS

Paper : III

(Mechanics)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 for Science

54 for Arts

Note : (i) No Supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidate should write all their answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

(ii) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

एक प्रश्न के सभी भागों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में एक ही स्थान पर लिखें। एक सम्पूर्ण प्रश्न का उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर न लिखें।

(iii) Attempt five questions in all, selecting at least one question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से कम से कम एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (a) Find out the formula for radial acceleration.

अरीय त्वरण का सूत्र ज्ञात कीजिए।

(b) If the radial and transverse velocities of a particle are always proportional to each other, show that the path of the particle is an equiangular spiral. If, in addition, the radial and transverse accelerations are also proportional to each other, show that the velocity of the particle varies as same power of the radius vector.

यदि किसी कण के अरीय तथा अनुप्रस्थ वेग सर्वदा एक दूसरे के समानुपाती हो तो सिद्ध कीजिए कि कण का पथ एकसमान कोणिक सर्पिल है। इसी के साथ, यदि अरीय तथा अनुप्रस्थ त्वरण भी एक दूसरे के समानुपाती हो, तो सिद्ध कीजिए कि इनका वेग ध्रुवान्तर रेखा की किसी घात के समानुपाती होगा।

2. (a) Discussing on SHM and then prove that $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$.

where T = period of oscillation.

सरल आवर्त गति पर विवेचना करते हुए सिद्ध कीजिए कि $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$.

जहाँ T = आवर्तकाल है।

(b) A mass m hangs from a fixed point by a light string and is given a small vertical displacement, prove that the motion is SHM. If l is the length of the string in equilibrium position and n the number of oscillations per second, show that the natural length of the

string is $l - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$.

m द्रव्यमान का एक कण हल्की डोरी द्वारा एक निश्चित बिन्दु से लटका हुआ है तथा इसे लघु ऊर्ध्वाधर विस्थापन दिया गया है, सिद्ध कीजिए कि कण की गति सरल आवर्त गति होगी। यदि संतुलन की दिशा में डोरी की लम्बाई l है तथा दोलन आवृत्ति n प्रति सेकण्ड है, तो सिद्ध कीजिए कि डोरी की स्वाभाविक लम्बाई होगी :

$$1 - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$$

Unit-II/इकाई-II

[8/10.8]

3. (a) Discuss the motion of a particle which is moving vertically downwards from rest through a medium whose resistance varying as velocity.

उस कण की गति की विवेचना कीजिए जो एक विरामावस्था से गुरुत्वाकर्षण के अधीन एक ऐसे माध्यम से होकर गिरता है जिसका प्रतिरोध उसके वेग के समानुपाती है।

- (b) A particle of mass m , is projected vertically upwards under gravity, the resistance of the air being mk times the velocity. Show that the greatest height attained by the particle is $\frac{V^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)]$, where V is the terminal velocity of the particle and λV is its initial velocity.

m संहति का एक कण गुरुत्वाकर्षण के अधीन ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर फेंका जाता है यदि वायु का प्रतिरोध, वेग का mk गुणा हो, तो सिद्ध कीजिए कि कण की अधिकतम ऊंचाई होगी : $\frac{V^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)]$

जहां V माध्यम में कण का अन्तिम वेग है तथा λV इसका प्रारम्भिक ऊर्ध्वाधर वेग है।

4. (a) A particle of mass m is projected from a fixed point into the atmosphere with velocity u in a direction making an angle α with the horizontal. To find its motion and the path described.

एक m संहति वाले कण की गति एवं पथ ज्ञात कीजिए जिसे किसी स्थिर बिन्दु से u वेग से क्षैतिज समतल से α कोण बनाते हुए वायुमण्डल में फेंका जाता है।

- (b) A uniform elastic string has length a_1 when the tension is T_1 and a length a_2 when the tension is T_2 . Show that its natural length is $(a_2 T_1 - a_1 T_2) / (T_1 - T_2)$ and the amount of work done in stretching it from the natural length to a length $a_1 + a_2$ is :

$$\frac{(a_1 T_1 - a_2 T_2)^2}{2(a_1 - a_2)(T_1 - T_2)}$$

एक प्रत्यास्थ धागे के अन्दर तनाव T_1 है जबकि लम्बाई a_1 है तथा तनाव T_2 जबकि लम्बाई a_2 है। सिद्ध कीजिए कि धागे की स्वाभाविक लम्बाई $(a_2 T_1 - a_1 T_2) / (T_1 - T_2)$ है तथा लम्बाई से $a_1 + a_2$ लम्बाई तक

$$\text{विस्तार करने में किया गया कार्य होगा : } \frac{(a_1 T_1 - a_2 T_2)^2}{2(a_1 - a_2)(T_1 - T_2)}$$

Unit-III/इकाई-III

[8/10.8]

5. (a) Find out the central orbit when central force varies inversely as the cube of the distance from a fixed point.

संकेन्द्र कक्षा ज्ञात कीजिए जब केन्द्रीय बल नियत बिन्दु से दूरी के घन व्युत्क्रमानुपाती हो।

- (b) If v_1 and v_2 are velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun, prove that :

$$(1-e)v_1 = (1+e)v_2$$

यदि v_1 तथा v_2 किसी ग्रह के रेखीय वेग हों जबकि वह सूर्य के क्रमशः न्यूनतम एवं अधिकतम दूरी पर है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1-e)v_1 = (1+e)v_2$$

6. (a) Find out moment of inertia of a hollow sphere of radius a and mass M about a diameter.

a त्रिज्या तथा M संहति के खोखले गोले का एक व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

- (b) Find out product of inertia of an elliptic quadrant about the axis of the ellipse.

एक दीर्घवृत्तीय चतुर्थांश पाद का दीर्घवृत्त के अक्षों के परितः जड़त्व गुणनफल ज्ञात कीजिए।

Unit-IV/इकाई-IV

[8/10.8]

7. (a) Prove that if three forces acting at a point be in equilibrium, then each force is proportional to the sine of the angle between the other two.

सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर लगे तीन बल यदि संतुलन में हों, तो प्रत्येक बल शेष दो बलों के बीच के कोण के ज्या का समानुपातिक होता है।

- (b) Three forces P, Q and R acting at a point are in equilibrium. If the angle between P and Q is double of the angle between P and R. Prove that $R^2 = Q(Q - P)$.

एक बिन्दु पर क्रियाशील तीन बल P, Q तथा R साम्यवस्था में हैं। यदि P तथा Q का मध्य कोण P तथा R के मध्य कोण का दुगुना है, तो सिद्ध कीजिए कि $R^2 = Q(Q - P)$ ।

- 8/ (a) Prove that the algebraic sum of the moments of two forces about any point in their plane is equal to the moment of their resultant about same point.

सिद्ध कीजिए कि बलों के समतल में स्थिर किसी बिन्दु के सापेक्ष उसके परिणामी के आघूर्ण के बराबर होता है।

- (b) Prove that the least force required to pull a body of weight 'w' on a rough horizontal plane is $w \sin \lambda$, where λ is the angle of friction.

सिद्ध कीजिए कि 'w' भार के एक पिण्ड को रुक्ष क्षैतिज समतल पर खींचने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल $w \sin \lambda$ है, जहां λ घर्षण कोण है।

Unit-V/इकाई-V

[8/10.8]

9. (a) Explain the principle of virtual work for a system of coplanar forces acting on a particle.

किसी कण पर सक्रिय समतलीय बल निकाय के लिए कल्पित कार्य के सिद्धान्त की व्याख्या कीजिए।

- (b) Five weightless rods of equal lengths are jointed together so as to form a rhombus ABCD with one diagonal BD. If a weight W be attached to C and the system be suspended

from A, show that there is thrust in BD equal to $\frac{W}{\sqrt{3}}$.

समान लम्बाई के पाँच भारहीन छड़ परस्पर जोड़े गये हैं ताकि एक विकर्ण BD सहित समचतुर्भुज ABCD बने। यदि C पर एक भार W बांध दिया जाए और निकाय को A से लटकाया जाए तो सिद्ध कीजिए कि

BD में प्रणोद $\frac{W}{\sqrt{3}}$ के तुल्य है।

10. (a) Write a note on geometrical properties of the common catenary.

साधारण कैटिनरी के ज्यामितीय गुणधर्मों पर टिप्पणी लिखिए।

- (b) A heavy uniform chain of length 2ℓ has one end attached to a small heavy ring which can slide on a rough horizontal rod which passes through A. If the weight of the ring be n times the weight of the chain, and μ is the coefficient of friction, show that its greatest possible distance from A is :

$$\frac{2\ell}{\lambda} \log \left\{ \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2} \right\}, \text{ where } \frac{1}{\lambda} = \mu(2n+1)$$

2ℓ लम्बाई की एक भारी एकसमान जंजीर का एक सिरा एक छोटी चिकनी धिरनी से जुड़ा है जो A से गुजरने वाली रुख क्षैतिज छड़ पर फिसलती है। यदि धिरनी का भार जंजीर के भार का n गुना हो तथा घर्षण गुणांक μ हो, तो A से महत्तम दूरी है :

$$\frac{2\ell}{\lambda} \log \left\{ \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2} \right\}, \text{ जहाँ } \frac{1}{\lambda} = \mu(2n+1)$$

----- x -----