

30402

B.A./B.Sc. (Pt. III)

**B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2024**  
(Three-Year Scheme of 10+2+3)  
(Common for the Faculties of Arts and Science)

**MATHEMATICS**

**Paper - II**

**( Complex Analysis )**

*Time Allowed : Three Hours*

*Maximum Marks : 40 for Science, 53 for Arts*

**Note :** (i) Attempt five questions in all, selecting one question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न हल करने हैं। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(ii) No Supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidate should write all their answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

(iii) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

एक प्रश्न के सभी भागों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में एक ही स्थान पर लिखें। एक सम्पूर्ण प्रश्न का उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर न लिखें।

1. (a) Define the following :

[4/6]

निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए :

(i) Complex plane

सम्मिश्र समतल

(ii) Stereographic projection

त्रिविम प्रक्षेप

(iii) Neighbourhood of a Point

एक बिन्दु का प्रतिवेश

(iv) Limit Point

सीमा बिन्दु

(b) Prove that continuity is necessary but not a sufficient condition for the existence of a finite derivative. [4/5]

सिद्ध कीजिए कि परिमित अवकलज के अस्तित्व के लिए सांतत्यता आवश्यक प्रतिबन्ध है परन्तु पर्याप्त नहीं।

2. (a) Prove that the function  $f(z) = \frac{x^2 y^5 (x + iy)}{x^4 + y^{10}}$ ,  $z \neq 0$  and  $f(0) = 0$  is not analytic at the origin though Cauchy-Riemann equations are satisfied at this point. [4/6]

प्रदर्शित कीजिए कि फलन  $f(z) = \frac{x^2 y^5 (x + iy)}{x^4 + y^{10}}$ ,  $z \neq 0$  तथा  $f(0) = 0$  मूल बिन्दु पर विश्लेषिक नहीं

है जबकि इस बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट है।

- (b) If  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  be an analytic function of  $z = x + iy$  and  $u = v = e^x (\cos y - \sin y)$ , find  $f(z)$  in terms of  $z$ . [4/5]

यदि  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$  का विश्लेषिक फलन है और  $u = v = e^x (\cos y - \sin y)$ ,  $f(z)$  को  $z$  के पदों में ज्ञात कीजिए।

### Unit-II/इकाई-II

3. (a) Let  $f(z)$  be a single valued analytic function in a simple connected domain  $G$  if  $a, b \in G$ , then prove that  $\int_a^b f(z) dz = \phi(b) - \phi(a)$ , where  $\phi(z)$  is an indefinite integral of  $f(z)$ . [4/5]

माना एकत्र: सम्बद्ध प्रवेश  $G$  में  $f(z)$  एक एकमानी विश्लेषिक फलन है यदि  $a, b \in G$ , तब प्रदर्शित कीजिए  $\int_a^b f(z) dz = \phi(b) - \phi(a)$  यहाँ  $\phi(z)$ ,  $f(z)$  का अनिश्चित समाकल है।

- (b) Evaluate:

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{1+i} z^2 dz.$$

4. (a) If a function  $f(z)$  is analytic within and on a simple closed contour  $C$ , then prove that its derivative at any point  $z_0$  inside  $C$  is given by  $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}$ . [4/5]

यदि एक फलन  $f(z)$  सरल सवृत कंटूर  $C$  के अन्दर एवं ऊपर एक विश्लेषिक फलन हो, तो प्रदर्शित कीजिए

$C$  के अन्दर किसी बिन्दु  $z_0$  पर इसके अवकलज का मान होगा  $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}$

- (b) Evaluate:

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left[ z - \left( \frac{\pi}{6} \right) \right]^3} dz$$

5. (a) If  $f(z)$  be analytic function within and on a simple closed contour  $C$ , then show that  $|f(z)|$  attains its maximum value on  $C$  (and not inside  $C$ ) unless  $f(z)$  is constant. [4/5]

यदि एक सरल सवृंत कन्टूर  $C$  के अन्दर एवं ऊपर प्रत्येक बिन्दु पर  $f(z)$  विश्लेषिक फलन है, तो सिद्ध कीजिए  $|f(z)|$  अपना महत्तम मान  $C$  की परिधि पर ( $C$  के अन्दर नहीं) ग्रहण करता है जब तक कि  $f(z)$  अचर फलन न हो।

- (b) With the help of Laurent Series for  $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z-2)}$  prove that if  $C$  be any closed contour within the annulus  $1 < |z| < 2$  then  $\int_C f(z) dz = 2\pi i$ . [4/6]

फलन  $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z-2)}$  की लौरॉ श्रेणी की सहायता से सिद्ध कीजिए कि यदि वलयिका  $1 < |z| < 2$  में  $C$  कोई सवृंत कन्टूर हो, तो  $\int_C f(z) dz = 2\pi i$

6. (a) Prove that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence. [4/5]

सिद्ध कीजिए कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत्त के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विश्लेषिक फलन निरूपित करता है।

- (b) Find the radii of convergence of the following power series : [4/6]

निम्न घात श्रेणियों की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

(i)  $\sum \left( \frac{z^2 + 1}{i + 1} \right)^n n^2$

(ii)  $\sum \frac{2^{-n}}{1 + in^2} z^n$

Unit-IV/इकाई-IV

7. (a) Find the kind of singularities of the following functions :

[4/5]

निम्न फलनों की विचित्रताओं की जाति ज्ञात कीजिए :

(i)  $\frac{1}{\sin z - \cos z}$  at  $z = \frac{\pi}{4}$

(ii)  $\tan \frac{1}{z}$  at  $z = 0$

- (b) Prove that every Polynomial of degree  $\geq 1$  has at least one zero.

[4/6]

सिद्ध कीजिए  $\geq 1$  के प्रत्येक बहुपद का कम से कम एक शून्य होता है।

8. (a) Find the residues of  $\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$  at all its poles in the finite plane.

[4/5]

सम्मिश्र तल के परिमित भाग में  $\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$  के समस्त अनन्तकों पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

- (b) Suppose  $f(z)$  and  $g(z)$  are analytic inside and on a simple closed contour  $C$  with  $|g(z)| < |f(z)|$  on  $C$ . Then show that  $f(z) + g(z)$  and  $f(z)$  have the same number of zeros inside  $C$ .

[4/6]

माना  $f(z)$  तथा  $g(z)$  संवृत्त परिरेखा  $C$  तथा उसके भीतर विश्लेषिक है तथा  $C$  पर प्रत्येक  $z$  के लिए  $|g(z)| < |f(z)|$  तो  $C$  के अन्दर  $f(z) + g(z)$  एवं  $f(z)$  के शून्यों की संख्या बराबर है।

Unit-V/इकाई-V

9. (a) In the transformation  $z = \frac{i-w}{i+w}$  show that the positive half of the  $w$ -plane given by

$v \geq 0$  corresponds to the circle  $|z| \leq 1$  in the  $z$ -plane.

[4/5]

रूपान्तरण  $z = \frac{i-w}{i+w}$  में प्रदर्शित कीजिए कि  $w$ -समतल का धन-अर्धतल  $v \geq 0$  के समवर्ती  $z$ -समतल में वृत्त  $|z| \leq 1$  है।

- (b) Find a bilinear transformation that maps the points  $z = 2, i, -2$  into  $w = 1, i, -1$  respectively. [4/5]

एक द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं  $z = 2, i, -2$  को क्रमशः  $w = 1, i, -1$  में प्रतिचित्रित करे।

10. (a) Use method of contour integration to prove that : [4/5]

परिरेखा समाकलन द्वारा सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{1-a^2}, 0 < a < 1.$$

- (b) Prove that there cannot be more than one analytic continuation of an analytic function  $f_1(z)$  into the same domain. [4/5]

सिद्ध कीजिए एक ही प्रान्त में विश्लेषिक फलन  $f_1(z)$  का एक से अधिक विश्लेषिक सांतत्य नहीं हो सकता।

----- x -----