30401

B.A./B.Sc. (Pt. III)

Printed Pages : 6

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2024

(Three-Year Scheme of 10+2+3)

(Common for the Faculties of Arts and Science)

MATHEMATICS

Paper-I

(Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 for Science, 53 for Arts

Note : (i) Attempt **five** questions in **all**, selecting **one** question from each unit. **All** questions carry **equal** marks.

प्रत्येक इकाई में से **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न हल करने हैं। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।

(ii) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write all their answera precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

(iii) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Show that the set Q^+ of the positive rational numbers forms as abelian group for the composition $*$ defined as :

$$a * b = \frac{ab}{2} \;\forall\, a, b \in Q^+$$

सिद्ध कीजिए कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ संक्रिया $*$ के लिए आबेली ग्रुप है, जहाँ $*$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$a * b = \frac{ab}{2} \;\forall\, a, b \in Q^+$$

$\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

(b) If $o(a)$ denotes the order of an element a in group G, then show that :

$$o\left(x\,a\,x^{-1}\right) = o(a) \;\forall\, x \in G$$

यदि $o(a)$ से समूह G में अवयव a की कोटि प्रदर्शित हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$o\left(x\,a\,x^{-1}\right) = o(a) \;\forall\, x \in G$$

$\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

2 (a) If $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $q = (2 \;\; 3 \;\; 4)$ be two permutations in S_5, then prove that :

$$pqp^{-1} = \left(p(2)\; p(3)\; p(4)\right)$$

यदि $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $q = (2 \;\; 3 \;\; 4)$ दो क्रमचय S_5 में हैं, तो सिद्ध कीजिए :

$$pqp^{-1} = \left(p(2)\; p(3)\; p(4)\right)$$

$\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

(b) The necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is :

$$a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

किसी समूह G का अरिक्त उपसमुच्चय H एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि :

$$a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

$\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) If f is a homomorphism of a group G to a group G' with Kernal K, then prove that K is a subgroup of G.

यदि f समूह G से समूह G' पर एक समाकारिता हो, तो सिद्ध कीजिए कि f की अष्टि K, समूह G का उपसमूह होता है। $\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

(b) Prove that the group

$$G = \langle \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\},+ \rangle$$

is isomorphic to the group

$$G' = \langle \{\ldots,-3m,-2m,-m,0,m,2m,3m,\ldots\},+ \rangle$$

where m is a fixed integer.

सिद्ध कीजिए कि समूह

$$G = \langle \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\},+ \rangle$$

समूह $G' = \langle \{\ldots,-3m,-2m,-m,0,m,2m,3m,\ldots\},+ \rangle$

के तुल्यकारी है, जहाँ m एक निश्चित पूर्णांक है। $\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

4. (a) Show that $H = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall \ g \in G\}$ is a normal subgroup of group G.

सिद्ध कीजिए कि $H = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall \ g \in G\}$ समूह G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

$\left(4\middle/5\frac{1}{4}\right)$

(b) Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का प्रत्येक समाकृतिक प्रतिबिम्ब किसी अवशेष वर्ग समूह G के तुल्यकारी होता है।

$\left(4\middle/5\frac{1}{4}\right)$

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) Prove that a ring R is without zero divisors iff the cancellation laws hold in R.

सिद्ध कीजिए कि वलय R शून्य भाजक रहित होगा यदि और केवल यदि R में निरसन नियम लागू होते हैं।

$\left(4\middle/5\frac{1}{4}\right)$

(b) For any real numbers $a, b \in R$, we define $a \oplus b = a + b + 1$ and $a \odot b = a + b + ab$ then show that $(R, \oplus, \odot)$ is a field.

यदि $a \oplus b = a + b + 1$ तथा $a \odot b = a + b + ab$ है, जहाँ $a, b \in R$ वास्तविक संख्याएँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $(R, \oplus, \odot)$ एक क्षेत्र है।

$\left(4\middle/5\frac{1}{4}\right)$

6. (a) Prove that the intersection of two subrings is also a subring.

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

$\left(4\middle/5\frac{1}{4}\right)$

(b) If R be a ring and $a \in R$, then show that $N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$ is subring of R.

यदि a किसी वलय R का एक अवयव है, तो सिद्ध कीजिए कि $N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$, R का उपवलय है।

$\left(4\middle/5\frac{1}{4}\right)$

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) If I_1 and I_2 be two Ideals of a ring R, then prove that :

$$I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$$

is an Ideal of R containing both I_1 and I_2.

यदि I_1 व I_2 किसी वलय R की दो गुणजावलियाँ हों, तो सिद्ध कीजिए :

$$I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$$

भी R की एक गुणजावली होगी जिसमें I_1 तथा I_2 दोनों अन्तर्विष्ट हैं। $\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

(b) Find all the principal Ideals of the ring $[\{0,1,2,3,4,5\}, +_6, \cdot_6]$.

वलय $[\{0,1,2,3,4,5\}, +_6, \cdot_6]$ की सभी मुख्य गुणजावली ज्ञात कीजिए। $\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

8. (a) Suppose $V_3(R) = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in R\}$ is a vector space over a field of real numbers R and if $W = \{(x,2y,3z) \mid x,y,z \in R\}$, then prove that $W(R)$ is a subspace of $V_3(R)$.

माना $V_3(R) = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in R\}$, वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर सदिश समष्टि है और यदि $W = \{(x,2y,3z) \mid x,y,z \in R\}$ हो, तो सिद्ध कीजिए $W(R)$, $V_3(R)$ की उपसमष्टि है।

$\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

(b) If $W_1(F)$ and $W_2(F)$ are subspaces of the vector space $V(F)$, then prove that $(W_1 \cap W_2)(F)$ is also subspace of $V(F)$.

यदि $W_1(F)$ तथा $W_2(F)$ सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिए $(W_1 \cap W_2)(F)$ भी $V(F)$ की उपसमष्टि है। $\left(4/5\frac{1}{4}\right)$

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) In vector space $V_3(R)$ express $v=(1,-2,5)$ as a linear combination of the given vectors $v_1=(1,2,3), v_2=(2,-1,1), v_3=(1,1,1)$.

सदिश समष्टि $V_3(R)$ में $v=(1,-2,5)$ को $v_1=(1,2,3), v_2=(2,-1,1), v_3=(1,1,1)$ के एकघात संचय में व्यक्त कीजिए। $\left(4/5\frac{1}{2}\right)$

(b) The set of non-zero vectors $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ of a vector space $V(F)$ is linearly dependent iff some $v_k, 2 \le k \le n$ is a linear combination of the preceding ones.

किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के अशून्य सदिशों का समुच्चय $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ एकघाततः परतन्त्र होगा यदि और केवल यदि जब कोई एक $v_k, 2 \le k \le n$ अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचय हो। $\left(4/5\frac{1}{2}\right)$

10. (a) Prove that the set $\{v_1, v_2, v_3\}$, where $v_1=(1,0,-1), v_2=(1,2,1)$ and $v_3=(0,-3,2)$ forms a basis of vector space $V_3(R)$.

सिद्ध कीजिए समुच्चय $\{v_1, v_2, v_3\}$, जहाँ $v_1=(1,0,-1), v_2=(1,2,1)$ तथा $v_3=(0,-3,2)$, सदिश समष्टि $V_3(R)$ का आधार बनाता है। $\left(4/5\frac{1}{2}\right)$

(b) If S and T are finite-dimensional subspaces of a vector space V, then prove that :

$$\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S \cap T)$$

यदि S तथा T किसी सदिश समष्टि V की परिमित विमीय उपसमष्टियाँ हों, तो सिद्ध कीजिए :

विमा $S +$ विमा $T =$ विमा $(S+T)$ + विमा $(S \cap T)$ होता है। $\left(4/5\frac{1}{2}\right)$

------ x ------