

B.A./B.Sc. (Part – III) Examination, 2023

(Common for the Faculties of Arts and Science)

(Three -Year Scheme of 10+2+3)

MATHEMATICS
Paper-II
(Complex Analysis)

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40 for Science

53 for Arts

Note : Attempt Five Questions in all, selecting one question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न हल करने हैं। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

- (1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answers precisely in the main answer book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर सही ढंग से लिखें।

- (2) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अंतर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।



UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Given a point (α, β, γ) on the Riemann sphere of unit radius. Find its corresponding point on the complex argand plane. 4/5

इकाई त्रिज्या के रीमान गोले पर स्थित बिन्दु (α, β, γ) का सम्मिश्र आर्गेण्ड-तल पर संगत बिन्दु ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that $f(z) = \bar{z}$ is not differentiable at any point. 4/5

सिद्ध कीजिए कि $f(z) = \bar{z}$ किसी भी बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

2. (a) Find the necessary conditions for function $f(z)$ to be analytic. 4/5

फलन $f(z)$ के विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

- (b) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$ and $u - v = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2 \cos x - e^y - e^{-y}}$, show that $f(z)$ subject to the condition $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ is $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot\left(\frac{z}{2}\right)$. 4/5

यदि $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का विश्लेषिक फलन है और $u - v = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2 \cos x - e^y - e^{-y}}$

प्रदर्शित कीजिए $f(z)$ प्रतिबन्ध $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ के अन्तर्गत $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot\left(\frac{z}{2}\right)$ होगा।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) State and prove Cauchy's fundamental theorem. 4/5

कोशी का मूल प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

- (b) Evaluate : 4/5

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-2+i}^{5+3i} z^3 dz$$

4. (a) State and prove Cauchy's integral formula. 4/5

कोशी समाकल सूत्र लिखिए व सिद्ध कीजिए।

- (b) Evaluate : 4/5

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{|z|=2} \frac{9z^2 - iz + 4}{z(z^2 + 1)} dz$$

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) State and prove Taylor's theorem for power series expansion of analytic function. 4/5
 विश्लेषिक फलनों की घात श्रेणी प्रसार के लिए टेलर प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

- (b) Find the Taylor's series for the function $f(z) = \frac{1+2z^3}{z+z^2}$ valid in the neighbourhood of the point $z = i$. 4/6

फलन $f(z) = \frac{1+2z^3}{z+z^2}$ के लिए बिन्दु $z = i$ के समीप्य में वैध टेलर श्रेणी ज्ञात करो।

6. (a) Prove that every analytic function in the extended plane must be constant. 4/5
 सिद्ध कीजिए कि विस्तृत तल में प्रत्येक विश्लेषिक फलन अचर होता है।

- (b) Find the region of convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$. 4/6

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$ का अभिसरण क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) If $f(z)$ has an isolated singularity at $z = a$ and is bounded in some deleted neighbourhood of a then prove that a is removable singularity. 4/6

सिद्ध कीजिए कि यदि $z = a$ पर फलन $f(z)$ की वियुक्त विचित्रता है तथा $z = a$ के कोई निष्कासित प्रतिवेश में $f(z)$ परिबद्ध हो तो a एक अपनेय विचित्रता होती है।

- (b) Find out the zeros and discuss the nature of singularities of function 4/5

$$f(z) = \frac{z-2}{z^2} \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

फलन $f(z) = \frac{z-2}{z^2} \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$ के शून्य ज्ञात कीजिए एवं विचित्रताओं की प्रकृति का विवेचन

कीजिए।

8. (a) State and prove Cauchy's Residue theorem. 4/6
कोशी अवशेष प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

- (b) Prove that all roots of $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ lie between circles $|z| = 1$ and $|z| = 2$. 4/5
सिद्ध कीजिए कि $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ के सभी मूल वृत्तों $|z| = 1$ एवं $|z| = 2$ के मध्य स्थित हैं।

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Show that the transformation $W = \frac{z-1}{z+1}$ transform $|W| \leq 1$ into the half plane $\text{Re}(z) \geq 0$. 4/6

सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण $W = \frac{z-1}{z+1}$ वृत्त $|W| \leq 1$ को अर्धसमतल $\text{Re}(z) \geq 0$ में रूपान्तरित करते हैं।

- (b) Find the image of the strip $0 \leq \text{Im}(z) \leq \frac{1}{2}$ under the map $W = \frac{1}{z}$. 4/5

रूपान्तरण $W = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत पट्टी $0 \leq \text{Im}(z) \leq \frac{1}{2}$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

10. (a) Prove that by contour integration $\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. 4/6

परिरेखा समाकलन द्वारा सिद्ध कीजिए $\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

- (b) Prove the uniqueness of analytic continuation. 4/5
विश्लेषिक सांतत्य की अद्वितीयता को सिद्ध कीजिए।

<https://www.pdsuonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से