

B.A./B.Sc. (Part – III) Examination, 2022

(Three -Year Scheme)

(10+2+3)

(Common for the Faculties of Art and Science)

MATHEMATICS**Paper-I****ALGEBRA**

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40 for Science

53 for Arts

Note : Attempt five questions in all, selecting one question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न हल करने हैं। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

- (1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरा उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

- (2) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अंतर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।



UNIT - I

इकाई - I

- (a) Prove that the order of every element of a finite group is finite and less than or equal to the order of the group. 4/5¼
सिद्ध कीजिए कि परिमित ग्रुप के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित होती है तथा यह या तो ग्रुप की कोटि के बराबर होती है या इससे कम।
- (b) Prove that the intersection of any two subgroup of a group G is also a subgroup of G. 4/5¼
सिद्ध कीजिए कि ग्रुप G के किन्हीं दो उपग्रुपों का सर्वनिष्ठ भी ग्रुप G का एक उपग्रुप होता है।
2. (a) If $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ and $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, then prove that $\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$. 4/5¼
यदि $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ तथा $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$
- (b) Find all the co-sets of $H = \{0, 4\}$ in the group $G = (Z_8, t_8)$. 4/5¼
ग्रुप $G = (Z_8, t_8)$ में $H = \{0, 4\}$ के सभी सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए।

UNIT - II

इकाई - II

3. (a) Prove that if f is a homomorphism of a group G to a group G' with Kernel K , then K is a subgroup of G . 4/5¼
सिद्ध कीजिए कि यदि f यह ग्रुप G से G' पर एक समाकारित हो, तो f की अष्टि K , ग्रुप G का एक उपग्रुप होता है।
- (b) Prove that every infinite cyclic group is isomorphic to the additive group of integers. 4/5¼
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक असीमित चक्रीय ग्रुप पूर्णाकों के योज्य ग्रुप के तुल्यकारी होता है।
4. (a) If H is a subgroup of group G and N is a normal subgroup of group G , then prove that $H \cap N$ is a normal subgroup of H . 4/5¼
यदि H , ग्रुप G का एक उपग्रुप है और N , ग्रुप G का विशिष्ट उपग्रुप है, तो सिद्ध कीजिए कि $H \cap N$, उपग्रुप H का एक विशिष्ट उपग्रुप होता है।

- (b) Prove that every quotient group of an abelian group is abelian. But its converse is not necessarily true. 4/5¼

सिद्ध कीजिए कि एक आबेली ग्रुप का प्रत्येक खण्ड ग्रुप आबेली होता है। परन्तु इसका विलोम आवश्यक नहीं की सत्य हो।

UNIT - III

इकाई - III

- (a) Prove that a ring R is without zero divisors iff the cancellation laws hold in R . 4/5¼

सिद्ध कीजिए कि वलय R शून्य भाजक रहित होगी। यदि और केवल यदि R में निरसन नियम लागू होते हैं।

- (b) Prove that the set of all real numbers of the form $m + n\sqrt{2}$, where m and n are integers with ordinary addition and multiplication forms a ring. Is it a field?

$2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}/3\frac{1}{4} + 2$

सिद्ध कीजिए कि $m + n\sqrt{2}$ जहाँ m तथा n पूर्णांक हों, आकार की वास्तविक संख्याओं का समुच्चय संख्याओं के योग एवं गुणन के लिए वलय है। क्या यह क्षेत्र है?

6. (a) Let $S = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, then prove that S is a subring of ring $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, where \mathbb{R} is set of real numbers. <https://www.pdusuonline.com>

माना $S = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, तब सिद्ध कीजिए कि S वलय $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ का उपवलय है, जहाँ \mathbb{R} वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। 4/5¼

- (b) Prove that every ring R can be embedded in a ring R' with unity. 4/5¼

सिद्ध कीजिए कि किसी भी वलय R का, एक इकाई सहित वलय R' में अन्तः स्थापन किया जा सकता है।

UNIT - IV

इकाई - IV

7. (a) Prove that the field $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ of rational numbers is a prime field. 4/5¼

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का क्षेत्र $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ एक अभाज्य क्षेत्र है।

- (b) Prove that the ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ of integers is a principal ideal ring and principal ideal domain.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों का वलय $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ एक मुख्य गुणजावली वलय तथा मुख्य गुणजावली प्रान्त है। (3+1)/(4+1¼)

8. (a) Prove that the union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V is a subspace if and only if either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$. 4/5½

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होती है यदि और केवल यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$ ।

- (b) Prove that the set $W = \{(x, y, z) \mid x - 3y + 4z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$ of 3-tuples is a subspace of the vector space $V_3(\mathbb{R})$. 4/5½

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $W = \{(x, y, z) \mid x - 3y + 4z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$ 3-तुपलों के सदिश समष्टि $V_3(\mathbb{R})$ की एक उपसमष्टि है।

UNIT - V

इकाई - V

9. (a) Prove that if S and T are subspaces of the vector space $V(F)$, then $S + T$ is a subspace of $V(F)$. 4/5½

सिद्ध कीजिए कि यदि S एवं T किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं, तब $S + T$, $V(F)$ की एक उपसमष्टि है।

- (b) Prove that the vectors $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ and $v_3 = (2, 1, 3)$ of $V_3(\mathbb{R})$ are L.I. 4/5½

सिद्ध कीजिए कि $V_3(\mathbb{R})$ के सदिश $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ तथा $v_3 = (2, 1, 3)$ एकघाततः स्वतंत्र हैं।

10. (a) Prove that the set $S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$ forms a basis of $V_3(\mathbb{R})$. 4/5½

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$; $V_3(\mathbb{R})$ का आधार है।

- (b) If $W(F)$ is a subspace of finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that the quotient space $(V/W)(F)$ is also finite dimensional and

$$\dim.(V/W) = \dim V - \dim. W$$

यदि $W(F)$ परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिए कि खण्ड समष्टि $(V/W)(F)$ भी परिमित विमा का होता है तथा

$$\text{विमा } (V/W) = \text{विमा } V - \text{विमा } W$$