B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2024

(Three Year Scheme of 10+2+3)

(Common for the Faculties of Arts and Science)

MATHEMATICS

Paper : I

(Real Analysis and Metric Space)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 for Science and 53 for Arts

) Attempt Five questions in all, selecting one question from each unit. All questions carry **equal** marks.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल पाँच प्रश्न हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

) No Supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write all their answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

i) All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गये विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

1. (a) If x and y are any two positive real numbers, then prove that $\exists n \in N$ such that $nx > y$. [4/5]

यदि x और y कोई दो धनात्मक वास्तविक संख्यायें हो तो सिद्ध कीजिए कि $\exists n \in N$ विद्यमान होता है जबकि $nx > y$

(b) Prove that the intersection of a finite number of open sets is an open set. [4/5]

सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित संख्या में विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ भी एक विवृत समुच्चय होता है।

2. (a) Let x is the set of all real valued bounded continuous functions defined in interval $[0,1]$ and if $d(f, g) = \sup\{|+f(x) - g(x)|, x \in [0,1], \forall f, g \in x\}$, then prove that d is a metric on x. [4/5]

माना x अन्तराल $[0.1]$ पर परिभाषित सभी वास्तविक, परिबद्ध एवं संतत फलनों का समुच्चय है। यदि $d(f, g) = \sup\{|+f(x) - g(x)|, x \in [0,1], \forall f, g \in x\}$ तो सिद्ध कीजिए कि d, x में एक दूरीक है।

(b) Prove that in a metric space, every open sphere is an open set. [4/5]

सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक विवृत गोलक एक विवृत समुच्चय होता है।

UNIT-II/इकाई-II

3. (a) If a sequence $<x_n>$ converges to ℓ, then prove that its every subsequence also converges to ℓ. [4/5]

यदि अनुक्रम $<x_n>$, ℓ को अभिसृत होती है तो सिद्ध कीजिए कि इसकी प्रत्येक उपानुक्रम भी ℓ को ही अभिसृत होती है।

(b) Prove that the sequence $<x_n>$ converges to '1', ehere $x_1 = \frac{1}{2}$ and $x_{n+1} = \frac{2x_{n+1}}{3}$ [4/6]

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$, '1' को अभिसृत होती है, जहाँ $x_1 = \frac{1}{2}$ और $x_{n+1} = \frac{2x_{n+1}}{3}$

4. (a) State and prove the Cauchy's general principle of convergence of sequence. [4/5]

अनुक्रमों के अभिसरण के कोशी सामान्य सिद्धान्त का कथन दीजिए एवं सिद्ध कीजिए।

(b) If f be a continuous function in [a,b], then prove that it attains its supremum and infimum atleast once in [a,b]. [4/6]

यदि f, [a,b] में संतत है, तो सिद्ध कीजिए कि वह इस अन्तराल में कम से कम एक बार अपने उच्चक तथा निम्नक को ग्रहण करता है।

UNIT-III / इकाई-III

5. (a) If f be a function defined on [a,b] such that $f'(c)$ exists and positive for some $c \in (a,b)$. Then prove that there exists a nbd $(c-\delta, c+\delta)$ of the point c in which f(x) is strictly monotonic increasing. [4/6]

यदि फलन f अन्तराल [a,b] में परिभाषित है तथा इसके किसी बिन्दु $c \in (a,b)$ पर इसका अवकलज $f'(c)$ विद्यमान है तथा धनात्मक है तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु c का कोई प्रतिवेश $(c-\delta, c+\delta)$) विद्यमान होगा जिसमें फलन f(x) एकदिष्ट वर्धमान होगा।

(b) Show that between any two roots of the equation $e^x \cos x = 1$, there exixts at least on root of the equation $e^x \sin x = 1$ [4/5]

प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $e^x \cos x = 1$ के किसी दो मूलों के मध्य समीकरण $e^x \sin x = 1$ का कम से कम एक मूल विद्यमान होता है।

6. (a) Show that the following function is discontinuous at (0, 0): [4/6]

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न फलन (0, 0) पर असंतत है :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(b) Show that the following function is not differentiable at the origin : [4/5]

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न फलन मूल बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

UNIT-IV / इकाई-IV

7. (a) If f and g be two real valued functions defined on [a,b] and $P\in P[a, b]$ then prove that : [4/6]

(i) $L(f+g, P)\geq L(f, P)+L(g, P)$

(ii) $U(f+g, P)\leq U(f, P)+U(g, P)$

यदि फलन f और g, [a,b] पर परिभाषित वास्तविक फलन हैं तथा [a,b] का कोई विभाजन P है तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $L(f+g, P)\geq L(f, P)+L(g, P)$

(ii) $U(f+g, P)\leq U(f, P)+U(g, P)$

(b) Prove that the function is not R-integrable in [0,2] : [4/5]

$$f(x)=\begin{cases}x+x^2 & ; \quad \text{if } x \text{ is rational}\\ x^2+x^3 & ; \quad \text{if } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

सिद्ध कीजिए की निम्न फलन [0,2] में R-समाकलनीय नहीं है :

$$f(x)=\begin{cases}x+x^2 \text{ ; यदि } x \text{ परिमेय है}\\ x^2+x^3 \text{ ; यदि } x \text{ अपरिमेय है}\end{cases}$$

8. (a) Prove that every continuous is R-integrable. [4/6]

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन R-समाकलनीय होता है।

(b) If $f \in R[a,b]$ and M, m are supremum and infimum of the function $f(x)$ in $[a,b]$, then prove that : [4/5]

(i) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$: if $b \geq a$

(ii) $m(b-a) \geq \int_a^b f(x)\,dx \geq M(b-a)$: if $b \leq a$

यदि $f \in R[a,b]$ तथा फलन f के $[a,b]$ में उच्चक व निम्नक M और m हैं तो सिद्ध कीजिए :

(i) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$: यदि $b \geq a$

(ii) $m(b-a) \geq \int_a^b f(x)\,dx \geq M(b-a)$: यदि $b \leq a$

UNIT-V / इकाई-V

9. (a) State and prove Weisstrass M-test for uniform convergence of series of functions.[4/5]

फलनों की श्रेणी के एकसमान अभिसरण के वायस्ट्रॉस M-परीक्षण का कथन कीजिए एवं सिद्ध कीजिए।

(b) Examine for uniform convergence of series, the sum of whose n-terms $S_n(x)$, where

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}\ ;\ 0 \leq x \leq 1$$ [4/5]

एक समान अभिसरण के लिये उस श्रेणी का परीक्षण कीजिए जिसके n-पदों का योग $S_n(x)$ है, जहाँ :

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}\ ;\ 0 \leq x \leq 1$$

0. (a) Examine the series $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ for uniform convergence and continuity of its sum function near $x = 0$ [4/5]

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ के एकसमान अभिसरण एवं इसके योग फलन का $x = 0$ के समीप सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

(b) Examine for term by term integration, the series, the sum of whose n-terms is : [4/5]

$S_n(x) = nx(1-x)^n$; $0 \le x \le 1$

श्रेणी का [0,1] में पदशः समाकलन के लिये परीक्षण कीजिए जिसमें n-पदों का योग है।

$S_n(x) = nx(1-x)^n$; $0 \le x \le 1$

------ X ------